

医用電磁気学

ME 技術実力検定試験、国家試験のための

過渡現象 補足資料

11・2 過 渡 現 象

電気回路に電圧を加えたり、または回路の電流をしゃ断したりすると、その瞬間から、一時的に回路には定常の状態とは異なった電流や電圧を発生することがある。この章では、これらの現象を生ずる基本的な回路のいくつかについて調べてみよう。

〔1〕 過渡現象とは

電気回路の素子が抵抗だけでなく、コンデンサやコイルのように、エネルギーを蓄える素子を含む回路では、電源スイッチを閉じて電圧を加えたり、または回路の定数が変化したりすると、回路電流に変化を及ぼす。この現象は、その瞬間で終わらずにしばらくの間不安定な状態を継続した後に、定常の状態にはいる。この定常の状態に達するまでの期間を**過渡期** (transient time) といい、この期間中の電気現象を**過渡現象** (transient phenomena) という。

このような過渡現象のうち、回路が抵抗 R のほかにインダクタンス L または静電容量 C のどちらか一つだけで構成されているときは、磁氣的または静電的エネルギーの一方についての現象が起こるので、これを**単エネルギー過渡現象** (simple energy transient) という。これに対して、回路が $R-L-C$ で構成される場合には、両方の性質をもったエネルギーの受け渡しが起こるので、複雑な現象を生ずる。これを**複エネルギー過渡現象** (double energy transient) という。ここでは、単エネルギーの過渡現象について調べてみよう。

〔2〕 直流回路の過渡現象

(1) R - L 直列回路

(a) R - L 直列回路に直流電圧を加えたとき 図 11.15 の回路でスイッチ S を閉じたとき、 t

秒後の回路電流を i とすれば、抵抗 R の端子電圧 $v_R = Ri$ 、コイル L の誘導起電力 $e = -Ldi/dt$ となり、その電圧を v_L とすれば、 $v_L = -e =$

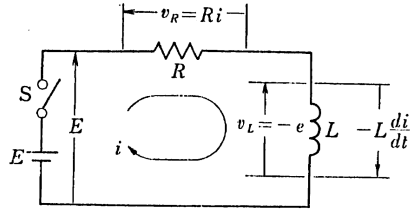


図 11.15 R - L 直列回路の過渡現象

Ldi/dt となる。そこで、この回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すれば、

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad (11.25)$$

の回路方程式が得られる。この式は微分方程式とよばれ、この微分方程式を初期条件 $t=0, i=0$ の下に解けば、電流 i は次式ようになる。

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (11.26)$$

ここで、 $E/R = i_s$ (定常項)、 $-(E/R)e^{-\frac{R}{L}t} = i_t$ (過渡項) とおけば、式(11.26)は、次の二項から成りたっていることがわかる。すなわち、

$$i = i_s + i_t \quad (11.26)'$$

また、図 11.15 の R の端子電圧 v_R は、

$$v_R = Ri = R \times \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (11.27)$$

となり、コイルの端子電圧 v_L は、 $E = v_L + v_R$ の関係から

$$v_L = E - v_R = Ee^{-\frac{R}{L}t} \quad (11.28)$$

となる。例えば、図 11.15 の回路において、 $R=10$ [Ω], $L=10$ [H], $E=10$ [V] とし、スイッチ S を入れてから 5 秒後までの i, v_R, v_L の値

第11章 各種の波形

表 11.2 t に対する i, v_R, v_L の関係

t [s]	i [A]	v_R [V]	v_L [V]
0.0	0	0	10
0.2	0.181	1.81	8.19
0.4	0.330	3.30	6.70
0.6	0.451	4.51	5.49
0.8	0.551	5.51	4.49
1.0	0.632	6.32	3.68
1.2	0.699	6.99	3.01
1.4	0.753	7.53	2.47
1.6	0.798	7.98	2.02
1.8	0.835	8.35	1.65
2.0	0.865	8.65	1.35
3.0	0.950	9.50	0.50
4.0	0.982	9.82	0.18
5.0	0.993	9.93	0.07

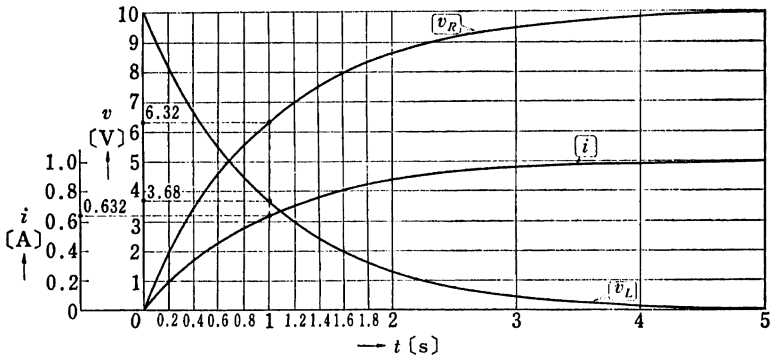


図 11.16 R-L 直列回路の過渡特性

を計算してみると、表 11.2 のようになる。この表の値をもとにして曲線を描くと、図 11.16 のようになる。

(b) **R-L 直列回路を短絡したとき** 図 11.17 の R-L 直列回路においてスイッチ S を①側に閉じ、定常状態の電流 $I = E/R$ が流れたら、スイッチ S を②側に閉じて回路を短絡すると、L に蓄えられていたエネルギー $(1/2)LI^2$ が放出されて過渡電流を生ずる。このときの回路方程式は、電圧 $E = 0$ であるから、次式のように表される。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (11.29)$$

この微分方程式を初期条件 $t=0, i = E/R$ の下に解けば、電流 i は次式のようになる。

$$i = \frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \quad (11.30)$$

この場合、R の端子電圧 v_R は、

$$v_R = Ri = R \frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = E \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \quad (11.31)$$

となる。従って、L の端子電圧 v_L は、

$$v_L = -Ri = -E \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \quad (11.32)$$

となり、時間とともに減少していく。これらの現象を図に示すと、図 11.18 のようになる。

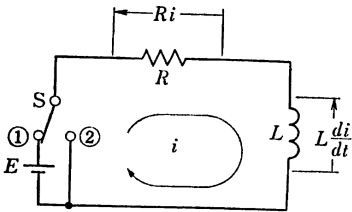


図 11.17 R-L 直列回路

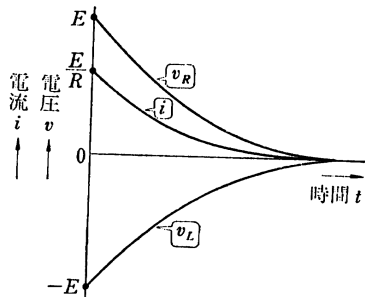


図 11.18 R-L 直列回路を短絡したとき

(c) 時定数 式(11.26)および式(11.30)で電池の電圧を E [V], R と L の大きさを表 11.3 の①, すなわち $R=10$ [Ω], $L=1$ [H] に

表 11.3 時定数と R, L の関係

	R [Ω]	L [H]	$T=L/R$ [s]	$i_1(t=T)$ [A]	$i_2(t=T)$ [A]
①	10	1	0.1	$0.632E/R$	$0.368E/R$
②	5	1	0.2	$0.632E/R$	$0.368E/R$
③	10	100	10	$0.632E/R$	$0.368E/R$
④	5	100	20	$0.632E/R$	$0.368E/R$

選んで L/R の値を求め, これを T とおけば, $T=0.1$ [s] となる。そこで式(11.26)と式(11.30)の電流を, それぞれ i_1, i_2 で表し, $t=T=0.1$ [s] のときの i_1 と i_2 を求めてみると, 次式のようになる。

$$i_1 = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0.632 \frac{E}{R} \text{ [A]} \quad (1)$$

$$i_2 = \frac{E}{R} \times \frac{1}{e} = 0.368 \frac{E}{R} \text{ [A]} \quad (2)$$

次に, 表 11.3 で R と L を②, ③, ④の順に選んで同じように調べてみると, いずれの場合も, i_1, i_2 の値は式(1), (2)と等しくなることがわかる。このことは, R と L がどんな値のときでも $L/R=T$ で決まる時間 t [秒] が経過すると, i_1 では定常電流 E/R の 63.2%, また i_2 では, はじめの電流 E/R の 36.8% の大きさになることを示している。

以上のように $T=L/R$ の値は, このような特定状態に至るまでの時間を決める要素になっているので, これを R - L 直列回路の時定数 (time constant) といい, 単位を秒*で表す。

* $v_L = L \frac{di}{dt}$ を変形すれば, $L = v_L \frac{dt}{di}$ となる。この L の次元は $\left[V \times \frac{s}{A} \right]$ である。

従って, $T = \frac{L}{R}$ の単位は $\left[\frac{H}{\Omega} \right] = \left[\frac{Vs}{\Omega A} \right] = [s]$ となる。

また、見方を変えれば、 L/R の値は i がさきに述べた特定電流になるまでの所要時間 t を示すことになるから、回路定数 R, L の回路と R', L' の回路を仮定し、 $L/R < L'/R'$ すなわち $T < T'$ とすれば、図 11.19(a), (b) に示した曲線のように、同じ電流値に達するまでの時間は R', L' のほうが R, L よりも長くかかることになる。なお、図中に示した細い実線は、それぞれ $t=0$ における接線で、それぞれ $t=T$ のとき定常状態の電流値を横切る直線になる。

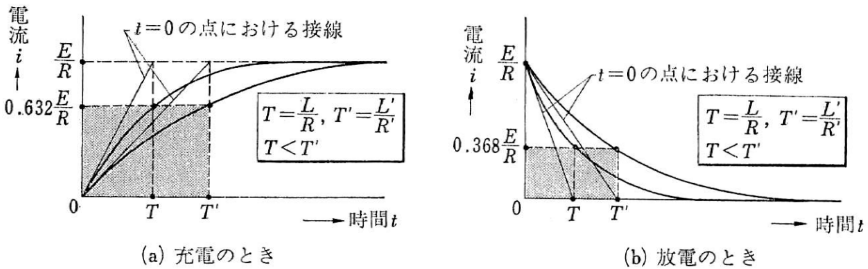


図 11.19 時定数の大小と特性

例題 1.

R - L 直列回路で、 $R=50$ [k Ω]、 $L=10$ [mH] のときの時定数を求めよ。

〔解答〕 R - L 直列回路の時定数 T は、次のようになる。

$$T = \frac{L}{R} = \frac{10 \times 10^{-3}}{50 \times 10^3} = 0.2 \times 10^{-6} \text{ [s]}$$

(2) R-C 直列回路

(a) **R-C 直列回路の充電電流** 図 11.20 のような R - C 直列回路でスイッチ S を閉じてから、 t 秒後の回路電流 i と、コンデンサ C に充電される電気量 q を求めてみよう。まず、 C の両端の電圧 $v_C = q/C$ であるから、回路方程式は

$$Ri + \frac{q}{C} = E \tag{11.33}$$

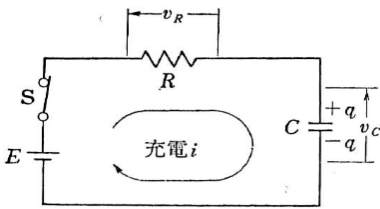


図 11.20 R-C 直列回路の充電

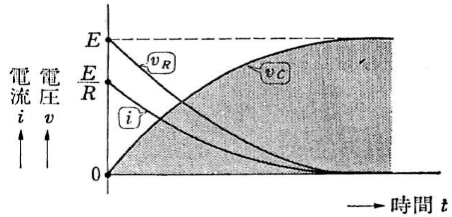


図 11.21 R-C 直列回路の充電時の v_C, v_R, i の関係

となり、 $i = dq/dt$ の関係を式(11.33)に代入すれば、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (11.34)$$

の微分方程式となる。この微分方程式を初期条件 $t=0, q=0$ の下に解けば、 q は

$$q = CE(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}) \quad (11.35)$$

となる。

また、 $i = dq/dt$ の関係から、過渡電流 i は、

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CE - CEe^{-\frac{1}{CR}t})}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{CR}t} \quad (11.36)$$

となる。

上式で R-L 直列回路の時定数 L/R に相当する値は CR であるから、 $T = CR$ を R-C 直列回路の時定数という。

また、このときの R の端子電圧 v_R は、

$$v_R = Ri = R \times \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{CR}t} = E e^{-\frac{1}{CR}t} \quad (11.37)$$

となり、C の端子電圧 v_C は、

$$v_C = E - v_R = E - E e^{-\frac{1}{CR}t} = E(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}) \quad (11.38)$$

となる。これらの関係をそれぞれ特性曲線で示すと、図 11.21 のようになる。

【例題 2.】

図 11.20 の回路で、スイッチ S を閉じてから $t=CR$ [秒] 経過した後のコンデンサ C の端子電圧 v_C は、定常状態の電圧 E の何パーセントまで上昇するか。

【解答】 コンデンサ C の端子電圧の式(11.38) $v_C = E(1 - e^{-\frac{t}{CR}})$ を用いて、定常状態の電圧 E との割合を求めてみると、

$$\frac{v_C}{E} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

となる。従って、63.2% まで上昇する。

(b) R-C 直列回路の放電

図 11.22 でスイッチ S を①側に閉じ、コンデンサ C が電源電圧 E まで充電した後、S を②側に閉じて放電させるときの過渡電流 i について調べてみよう。このとき、放電回路には電源を含まないから、回路方程式は、次のようになる。

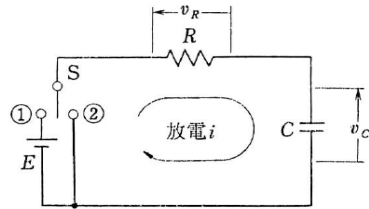


図 11.22 R-C 直列回路の放電

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (11.39)$$

この微分方程式を初期条件 $t=0, q=CE$ の下に解けば、 q は次のようになる。

$$q = CE e^{-\frac{t}{CR}} \quad (11.40)$$

また、 $i = dq/dt$ の関係から、放電電流 i は、

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CE e^{-\frac{t}{CR}})}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}} \quad (11.41)$$

となる。 i の値が負になるのは、放電電流が充電電流とは逆向きに流れることを示している。

また、放電時の R の端子電圧 v_R は、充電時とは逆向きになり、

$$v_R = Ri = R \left(-\frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{1}{CR}t} \right) = -E \varepsilon^{-\frac{1}{CR}t} \quad (11.42)$$

となる。従って、放電時の C の端子電圧 v_C は、

$$v_C = -v_R = E \varepsilon^{-\frac{1}{CR}t} \quad (11.43)$$

となり、時間とともに減少していく。図 11.23 は、以上の関係を特性曲線で表したものである。

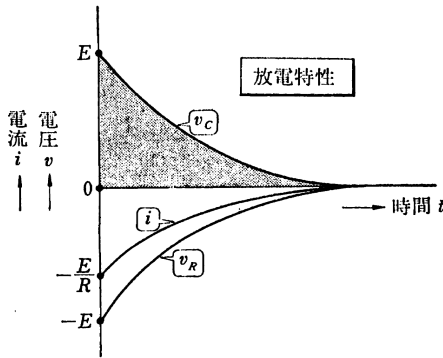


図 11.23 $R-C$ 直列回路の放電時の v_C, v_R, i の関係

図 11.24 は、 $R-C$ 直列回路において充・放電を交互にくり返したときの特性の一例を示したものである。これらの波形は、時定数を変えることによって変わってくる。

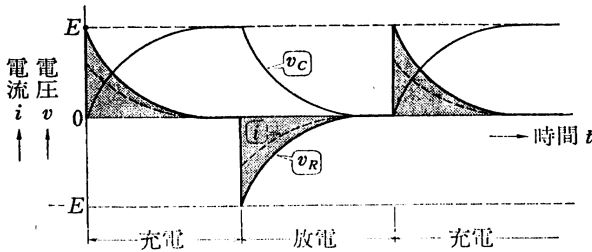


図 11.24 $R-C$ 直列回路の充・放電特性

例題 3.

図 11.25 で、コンデンサ C に充電が完了した後、スイッチ S を開いて放電させるときの過渡電流を求めよ。

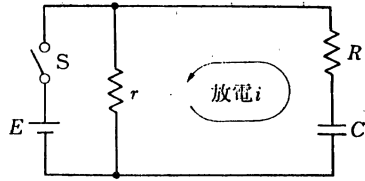


図 11.25

〔解答〕 R - C 直列回路の放電の場合であるから、式(11.39)を用いれば、

$$(r+R)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

従って、放電電流 i は、式(11.41)の R を $(r+R)$ で置き換えれば、

$$i = -\frac{E}{r+R} \varepsilon^{-\frac{1}{C(r+R)}t}$$

例題 4.

R - C 直列回路で、 $R=1$ [M Ω]、 $C=0.1$ [μ F)] のときの時定数を求めよ。

〔解答〕 R - C 直列回路の時定数 T は、次のようになる。

$$T = CR = 0.1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^6 = 0.1 \text{ [s]}$$

桐 蔭 横 浜 大 学
医 用 工 学 部 臨 床 工 学 科
2015 年 1 月 7 日 編 集