工学ワークショップⅡ

計測と誤差

（データ処理と統計手法）

担当　森下武志

医用工学部

Ⅰ．　学習のねらい

さまざまな計測で得られる数値データの基本的な扱い方と処理方法を学ぶと共に、統計手法を用いた処理法、処理結果の扱い方や見方を学習することで、今後に生かせる統計的基礎知識と技能を養う。

Ⅱ．　実施時間

Ａ班とＢ班の２班に分けて実施し、各班とも１週で完結させる。１週あたり３コマ（１コマ９０分）で２，３，４限目の時間帯とする。

Ⅲ．　実習内容

１コマ目（２限目）　データと数量化の基礎学習

比較的使用頻度の高い計測機器の扱い方に関する学習と、実験における実測値の扱い方、標準偏差、等分散の差の検定、二つの母平均の差の検定などについて学習する。

２コマ目（３限目）

様々な計測機器を使って、任意の対象物の計測実験を行う。また、得られたデータはグループなどで交換し、自分と他人のデータを収集する。

３コマ目（４限目）

計測実験で得られたデータを用いたデータ処理、標準偏差などの計算を行い、知識を実践で確かめて実践力を身に付ける。

Ⅳ.　計測とバラツキの原因

4.1　実験における誤差の存在

実験を行いデータを得るまでには、次のような流れがあります。

- 実験を行う
- 実験の製品の中からサンプルをとる。
- サンプルを測定し、データを得る。

このようなとき、通常データにバラツキがでるのが普通です。そのバラツキを**誤差**と呼んでいますが、この誤差には次に示す“測定誤差”、“サンプリング誤差”、“実験誤差”の３つを理解しておくことが大切です。

⑴ **測定誤差：同一サンプル**を測ったときの**測定内のデータ間**のバラツキ

⑵ **サンプリング誤差：同一の実験**でつくられた製品の中から、抜き取った**サンプル（測定対象物など）間**のバラツキ

⑶ **実験誤差：同一条件の組合せで行った実験間**のバラツキ

実験によって得られるデータの品質を管理するための方法論とされる統計的品質管理や実験計画法などに従えば、すべてデータを基本としているので、常にこの３つの誤差、バラツキを認めて、解析できるような知識が必要です。自分の予測していた値と異なった値が得られると、これは実験誤差だ、あるいは測定誤差だとして簡単に処理すると、実は次のような要素が潜んでいます。
以下に、このような誤差に関する性質をあげます。

① 誤　差：目的とする実験（母集団）の真の値とサンプル値（測定データ）との差という要素
② 信頼性：サンプルのデータが信頼おけるかという、つまり何らかのミスやトラブルなどの異常原因がなかったかという要素
③ 精　度：同一サンプルを無限回測定したときのデータのバラツキの幅をいい、幅が小さいほど、精度が良いと判断してしまう要素
④ カタヨリ、正確さ：同一サンプルを無限回測定したときの分布の平均値と真の平均値との差という要素

このように、実験で生じる誤差には様々な要因や原因があるので、まずはこれらの存在を把握し、今後の学習に役立てていただく基礎力を養ってください。そのため今回は、個々の全てに深く踏み込みませんが、しかしこれらの項目を知ることで、これを頼りに次ぎは、必要に応じてみなさん自身で学習が可能となり、より良い調査や実験、研究を進めることができるようになります。

4.2　計測精度を定める要素

自然科学や技術の分野で、精度と呼ばれる言葉には、次の 2 つの要素が含まれていることを学習します。

正確度：　その値が「真値」に近い値であることを示す尺度

精度　：　複数回の値の間で互いのばらつきの小ささの尺度
（複数回の測定、もしくは計算の結果も）

実際の測定結果では、正確度は高くても精度が低いこともあれば、逆に精度が高いが正確度が低いこともあります。また、正確かつ高精度な結果を「有効、又は妥当」であるといっています。 例えば、有効なデータだ、とか、妥当なデータである、などです。ここで、この正確度と精度をイメージで表したものが下図となります。

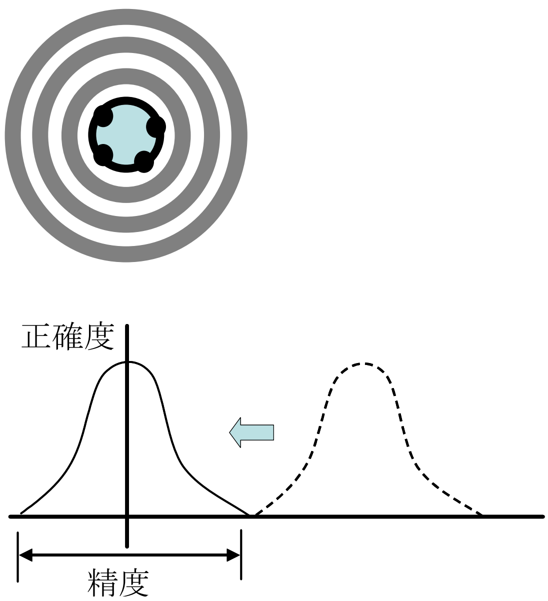


図１　測定結果の正確度は高くても精度が低い場合

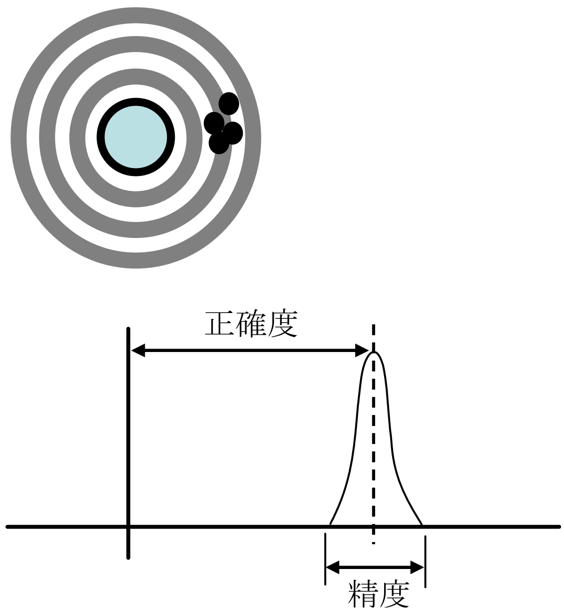


図２　精度が高いが正確度が低い場合

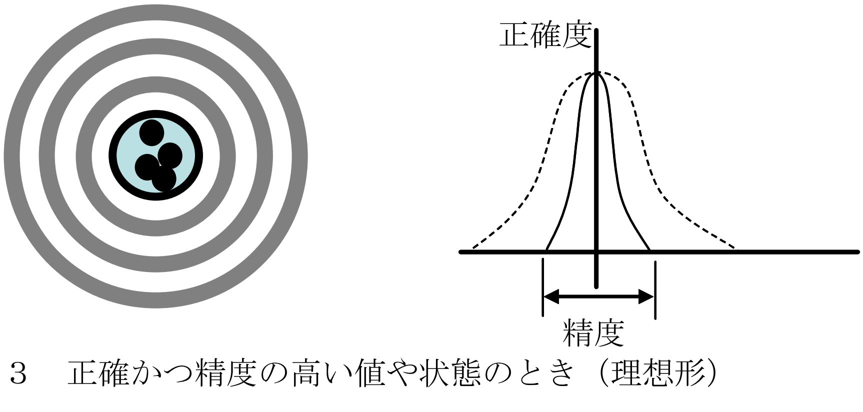


図３　正確かつ精度の高い値や状態のとき（理想形）

4.3　計測法（直読と推読）

１）　直読

通常、目盛りは最小単位までを直読みします。日常生活においては、普通の読み方であり、1mm 単位で目盛りが刻まれたプラスチック定規で鉛筆の長さを測るような場合，下図の場合は、まず 148mm と読むのが普通です。

２）　推読

さらに、148mm とちょっとあるなぁと感じます。次に最小目盛りの以下まで“だいたい（目分量）で推し量って読む”ことを推読といいます。理科の教科書や JIS 規格の有効数字※の定義から、一般に最小目盛りの 1/10 まで読むことになっており、下図の鉛筆の長さを推読すると，148.2mm と読むことができます。(これを 148.1mm とか 148.3mm などと読んでも誤差範囲であり間違いではない)

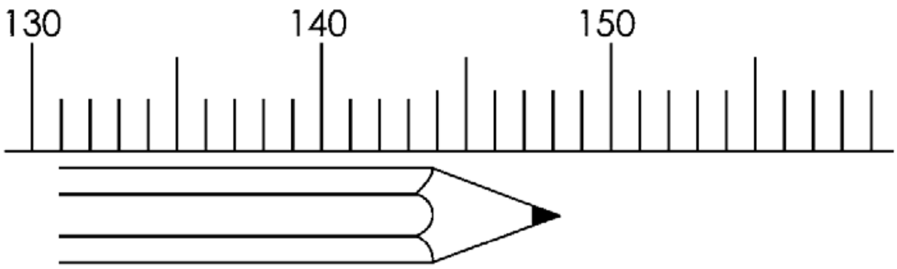


図４　鉛筆の長さ測定の様子

> JIS 規格とは
> 日本工業規格（にほんこうぎょうきかく、Japanese Industrial Standards）は、工業標準化法に基づき、日本工業標準調査会の答申を受けて、主務大臣が制定する工業標準であり、日本の国家標準の一つです。JIS（ジス）または JIS 規格（ジスきかく）と通称されています。

※ 有効数字は「計測結果などを表す数字のうちで、位取りを示すだけのゼロを除いた意味のある数字」と JIS で規定(JIS K0211)されています。つまり、誤差が含まれる最初の桁までが有効となるので、目盛がある上記の計測器等の場合、最小目盛りの 1/10 までを読むのが自然な測定方法となります。なお、目盛そのものについても詳細に JIS で規定されていますが、ここでは割愛します。

Ⅴ　データと数量化の基礎

5.1　位置とバラツキの表し方

　実験の測定値やデータを使って、位置や点を表す方法として、平均値やメジアンを用い、バラツキを表すには標準偏差や範囲を用いる方法があります。

（1）　平均値 $\bar{x}$　（エックスバーと読む）

個々の測定値の合計を測定値の数で割ったものが平均値 $\bar{x}$ です。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\Sigma x}{n}$$

ここで　x_1 ：第 1 番目の測定値

x_2 ：第 2 番目の測定値

・・・・・・・・・・

x_n ：第 n 番目の測定値

（ただし、n：サンプルの大きさ）

【例題】５個の品物の寸法が

9.16　9.25　9.15　9.21　9.20　（mm）

であったとき平均値は

$$\bar{x} = \frac{9.16 + 9.25 + 9.15 + 9.21 + 9.20}{5} = \frac{45.194}{5} = 9.194\ (mm)$$

となります。

平均値は一般には、個々の測定値より 1 桁下まで求めておきます。
（正確な位取りは次項で学びます）

（２）　メジアン（中央値）$\widetilde{x}$　（エックスナミガタと読む）

測定値の奇数個の場合、測定値の大きさの順にならべて、ちょうど中央にあたる値をメジアンといいます。また、測定値が偶数個の場合は、中央の二つ値の平均値がメジアンになります。

【奇数個の場合の例題】
9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）というデータがあるとき、このデータからメジアンを求めると

大きさの順に並び替え→9.15　9.16　$\boxed{9.20}$　9.21　9.25

したがって、$\widetilde{x}$ ＝9.20 (mm)　となります。

【偶数個の場合の例題】
9.16　9.25　9.15　9.21（mm）という場合のメジアンは、

大きさの順に並び替え→9.15　9.16　9.21　9.25

したがって、$\bar{x} = \dfrac{9.16+9.21}{2}$ ＝9.185 (mm)　となります。

（３）　範囲 R　（Range の R を用いる）

1 組の測定値のうちの最大値と最小値との差を範囲といいます。標準偏差は計算に手間がかかるため、測定値の数が少ない（n≦10）場合には範囲を使ってバラツキを表すことがしばしば行われます。
x を測定値した時、

R＝（x の最大値）－（x の最小値）

であり、簡単に求められます。

【例題】9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）という測定値の範囲 R はいくらか。

回答：　R＝9.25－9.16＝0.1　（ｍｍ）　となります。

（４）　標準偏差 σ　（バラツキぐあいを示す量）

標準偏差を計算するには、次のように**平方和Ｓ**を**自由度**ϕ（＝n－1）で割った不偏分散を求め、この平方根を計算することで求められます。

平方和　$$S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$$

(不偏)分散　$$V = \frac{S}{\phi} = \frac{S}{n-1} = \frac{(\chi_1 - \bar{\chi})^2 + (\chi_2 - \bar{\chi})^2 + \cdots + (\chi_n - \bar{\chi})^2}{n-1}$$

標準偏差　$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 + \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - x_n)^2}{n-1}}$$

【例題】9.16　9.25　9.15　9.21　9.20（mm）という測定値から標準偏差σを求めなさい。ただし、関数電卓や Excel などの機能は使わずに、上記の手順で求めること。

$$\bar{x} = \frac{9.16 + 9.25 + 9.15 + 9.21 + 9.20}{5} = \frac{45.194}{5} = 9.194\ \ (mm)$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

$$= \sqrt{\frac{(9.16 - 9.194)^2 + (9.25 - 9.194)^2 + \cdots + (9.20 - 9.194)^2}{5-1}}$$

$$= 0.0403$$

一言メモ：集団中の**サンプルデータを使い**その集団の標準偏差を推定する場合、つまり母集団が不明の場合ｎ−1 が多く用いられます。この場合、標準偏差の記号としてｓが使われる場合があります。
また、有限母集団の場合、**全部のデータを使い**その集団の標準偏差を求める場合は単にｎで割ります。その場合は、ｓは使わずσ(シグマ)という記号の表現になります。この場合、σを標準偏差といい、ｓは不偏標準偏差といいます。しかし、標準偏差の記号も、σが一般的に使われる傾向が多いようです。
また、Ｓは平方和にも使用されるためσを使うことで混乱を避けられます。

～処理後のデータは３つ組で記録しておく～

例えば上記の例題では、

$\bar{x}$ ＝ 9.194
σ ＝ 0.0403
n ＝ 5

その他の組み合わせでは

$\begin{cases} \bar{x} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{n} \end{cases}$ や $\begin{cases} \bar{x} \\ \tilde{x} \\ \mathrm{n} \end{cases}$ など

5.2　桁の求め方

ここではJISに規定される基本的な扱い方に沿って学習します。

1）平均値を求める場合

平均値の桁数は、測定値の測定単位と測定値の個数によって、何桁まで求めるかが、表１のように決められています。

表１　平均値と標準偏差の桁数

測定値の測定単位	測定値の個数		
0.1、1、10などの単位 0.2、2、20などの単位 0.5、5、50などの単位	— ４未満 10未満	2～20 4～40 10～100	21～200 41～400 101～1001
平均値の桁数	測定値と同じ	測定値より 1桁多くする	測定値より 2桁多くする
標準偏差の桁数	有効数字を最大３桁まで出す		

ここで、測定値の測定単位とは、**データの最小のキザミ**のことをいいます。
表２に、その例を示します。

表２　測定値の測定単位とは

測定値の測定単位	得られたデータ
0.1、1、10などの単位とは	53.4　53.5　53.6　や　40.0　50.0　60.0など
0.2、2、20などの単位とは	64.0　66.0　68.0　や　0.04　0.06　0.08など
0.5、5、50などの単位とは	0.05　0.10　0.15　や　76.5　77.0　77.5など

【例題】

1）では、以下のような10個のデータが得られた場合について、表1を使って平均値を求めてみましょう。

2.55	2.63	2.48	2.50	2.52
2.59	2.50	2.46	2.53	2.50

この場合は、表1より

・測定値の測定単位は、0.01　よって「0.1、1、10 などの単位」の部分を見る。

・測定値の個数は　　　10個　よって「2～20」の所を見る。

従って、問の平均値の桁数は、「測定値よりも1桁多く求めればよい」ということになります。実際の計算では

$$\frac{(2.55+2.63+2.48+\cdots\cdots+2.53+2.50)}{10} = \frac{25.26}{10} = 2.526$$

測定値は小数点以下第2位の数値であるので、この場合の平均値の桁数は、「測定値より1桁多く求める」ことから、

$$\overline{x} = 2.526$$

となります。

2）これとは別に、**標準偏差σを求める場合は、有効数字を最大3桁まで算出**します。

― 注 意 ―

測定値が存在する範囲を$\overline{x}\pm3\sigma$というように推定することがあります。加減算する**桁数が不ぞろい**のときには、**桁数の小さい方に合せて**丸めます。

例えば、$\overline{x}=52.135$、　$\sigma=1.48$　の場合は次のようになります。

$$\overline{x}+3\sigma = 52.135+3\times1.48 = 52.135+4.44 = 56.575 \rightarrow 56.58$$

$$\overline{x}-3\sigma = 52.135-3\times1.48 = 52.135-4.44 = 47.695 \rightarrow 47.70$$

＜演習１＞

ある化学薬品の主成分Ｘを測定して、次の測定値を得ました。平均値および標準偏差の桁数は、どこまで算出すればよいか。JIS で定められた方法を使って、途中経過も含めて実際に算出し回答しなさい。（上記で学んだ方法）

81.3	79.1	81.0	78.0	80.5	81.3
82.5	80.8	85.3	81.8	84.0	（%）

（回答）

この場合、測定単位（測定のキザミ）は 0.1%、サンプル数 n=11 より、

平均値　$\bar{x}$　＝　81.418　→　81.42　（測定値より 1 桁多くします）

標準偏差 S　＝　2.038　→　2.04　（有効数字 3 桁とします）

＜演習２＞

0.2mA きざみの電流計を用いて、ある電子部品の動作電流を測定し、次の測定値が得られました。平均値、標準偏差の桁数は何桁まで算出すればよいか、実際に計算しながら途中経過も含めて回答しなさい。

2.42　2.50　2.58　2.60　2.64　2.56　2.42　（mA）

（回答）

この場合、測定単位は 0.2mA、サンプル数 n= 7 より、

平均値　$\bar{x}$　＝　2.5314　→　2.531　（測定値より 1 桁多くします）

標準偏差 S　＝　0.08707　→　0.0871　（有効数字 3 桁とします）

＜演習３＞

0.5 秒きざみのストップウオッチを用いて、ある検査作業について時間測定を行い、次の計測値を得た。同様に、平均値、標準偏差の桁数は何桁まで算出すればよいか、実際に計算しながら途中経過も含めて回答しなさい。

34.5　35.0　33.5　35.0　34.0　38.5　（秒）

（回答）

この場合、測定単位は 0.5 秒、サンプル数 n=6 より、

平均値　$\bar{x}$　＝　35.08　→　35.1　（測定値と同じ）

標準偏差 S　＝　1.772　→　1.77　（有効数字 3 桁とします）

注意 : 標準偏差など計算途中で桁数を省略(丸め)し過ぎないようにしてください。計算機などを用いる場合、計算途中で書き留める際は、有効数字の扱い方から有効数字より 1 桁多く求めておく。解答までイッキなら計算機にゆだねる。

5.3　正規分布（ガウス分布）と確率

確率論や統計学で用いられる正規分布とは、平均値の付近に集積するようなデータの分布を表した連続的な変数に関する確率分布となります。この正規分布は平均μと標準偏差σとを指定すれば定まるので、$N(\mu,\sigma)$と略記することができます。また、これを表す正規分布の確率密度関数と累積分布関数は次式で与えられ、図５、６のように示されます。つまり、正規分布の確率密度関数は全区間で積分すると１（＝面積が１），平均が μ，分散が σ^2となるように作られています。面積が１ということは、“正規分部内において起こりうる確率を100%(=1)とする”ということになります。累積分布関数も１に収束しています。

$$確率密度関数：f(\chi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(\chi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad （式 5.3.1）$$

$$累積分布関数：F(\chi)=\int_{-\infty}^{\chi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\;e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt \qquad （式 5.3.2）$$

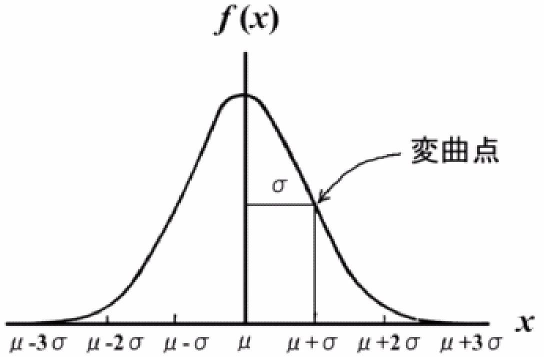


図５　正規分布Ｎ（μ，σ）の確率密度関数

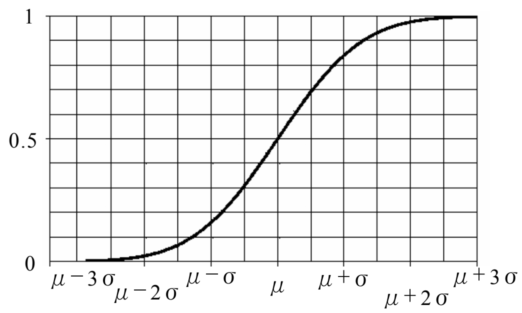


図６　正規分布の累積分布関数

物理量の測定や化学分析の際には、測定器具や材料などの補正可能なカタヨリによる必然的な誤差を除いたとしても、なお、たくさんの偶然的な影響によって誤差が生じるものと考えられます。このような偶然的誤差の分布は正規分布になるといわれています。

また、**カタヨリ**(bias)とは、データもしくは推定量の分布の**中心（中心値）と真の値との差**のことです(前者が大きいとき正となります)。
データの精度を考える場合、標準偏差の計算に気をとられ、盲点となりやすい要素であるので、注意を払うようにしてください。

5.3.1　標準偏差と確率の関係

それでは 7 ページ(4)の標準偏差に話しを戻します。正規分布と標準偏差との関係を図 7 に示します。図のように、**ばらつき範囲の確率**は、“平均値 μ に標準偏差 σ を±する”ことで簡単に求めることができます。

ある計測値のデータがあった場合、その“平均を中心とするバラツキの分布の全体を示しているのが正規分布（面積が 1 ：100%)”でした。そして、その計測値データから求めた標準偏差は、正規分布の範囲を示しており、**平均値を中心にその範囲に収まる確率を示しています**。

その確率は、平均値 μ 、標準偏差 σ の正規分布とすると、

> 「 $\mu\pm\sigma$ 」の区間にデータが入る確率は約 68％（区間内の面積が約 0.68）
>
> 「 $\mu\pm2\sigma$ 」の区間にデータが入る確率は約 95％（区間内の面積が約 0.95）
>
> 「 $\mu\pm3\sigma$ 」の区間にデータが入る確率は約 99.7％（区間内の面積が約 0.997）
>
> （ $\mu\pm3\sigma$ 区間はこの区間から外れる確率は約 0.3%なので、1000 回行なうと 3 回は外れる確率を表すことから、千三つ（せんみつ）とも呼ばれることがあります）

となります。**この関係はとても重要なので記憶してください。**

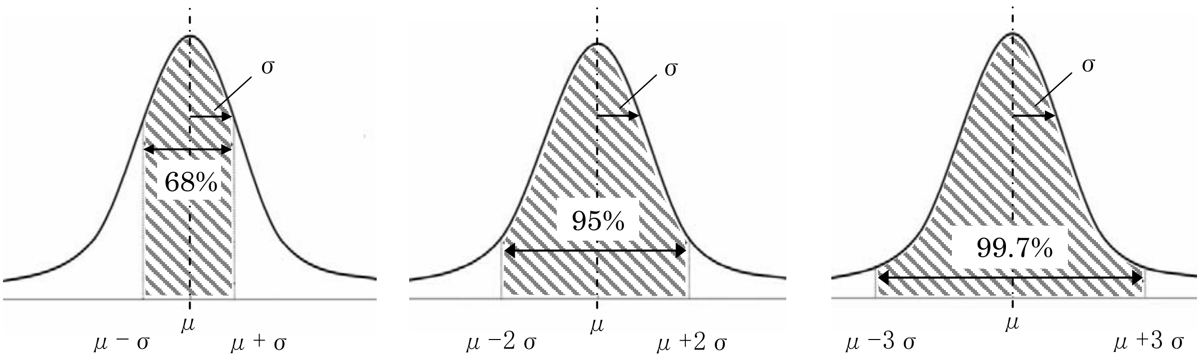


図 7　正規分布の累積分布関数

5.3.2　標準正規分布

統計的方法では正規分布に関するいろいろの確率がしばしば必要になってきます。正規分布はμを中心に左右対称で、μ、σの値のいかんにかかわず、ある係数uについて、累積分布関数 $F(\mu+u\sigma)$の値は同じです。このとこを利用すれば、平均が 0、**標準偏差が 1 の正規分布** －標準正規分布(standard normal distribution)－ の累積分布の値がわかっていれば、**すべての正規分布について確率を求めることができます**。これから一般の正規分布を標準正規分布に変換して確率を求める方法があります。

一般に正規分布を標準正規分布に変換することを**標準化**するといいます。標準化のための変数変換は、

$$x=\mu+u\sigma \qquad \text{(式 5.3.3)}$$

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \text{(式 5.3.4)}$$

で求められます。

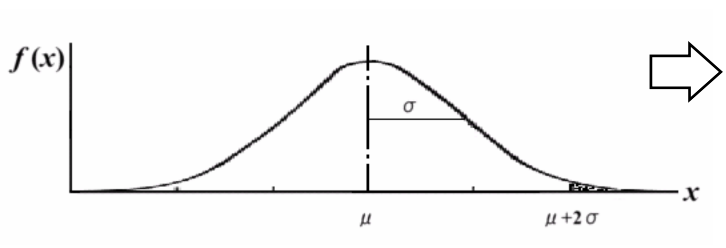
注意： uはμからの偏差をσを単位として測ったものであるから、$\mu=2$ というのは平均から2σ離れているところ示しています。

【例題】

平均μ＝15、標準偏差　σ＝ 7 の正規分布で、xの値が 29 より大である確率はいくらか？

例解　　変数変換の式（5.3.4）より

$$u=\frac{29-15}{7}=2.00$$



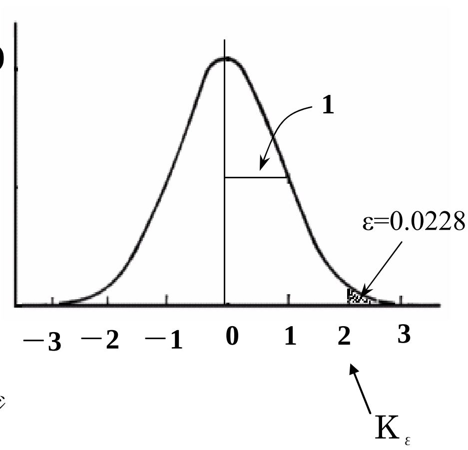


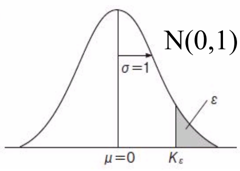
図 8　正規分布の変換イメージ

となるので、標準正規分布表(P11)から、

K_ε =2.00、ゆえにε=0.0228 となります。

答　2.28%

表３　標準正規分布表（上側確率）　　斜線部を求める表 →



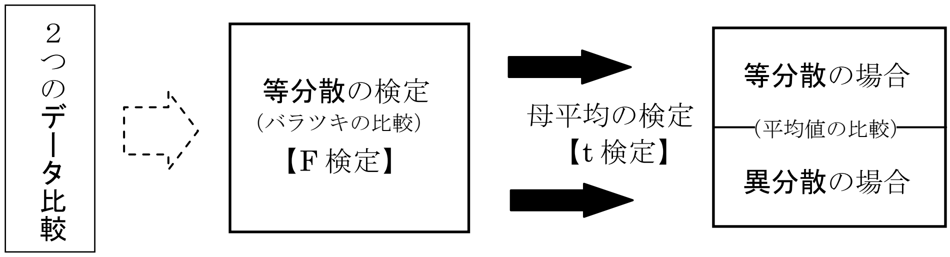
Kε	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000

（Zから上側確率を求める。一般に両側検定なので、数値を2倍したものをαとして使用する）

表の読み方例：　K_{ε} ＝1.96 に対する ε は、左の見出しの“1.9”から右に行き、次に、上の見出しから“**６の列**”から下がってきたところを読み、0.0250　と調べる。

Ⅵ　データとデータの検定（分散と母平均）

　ここでは２つのデータ群があるとき、双方のデータは、等しいか、否かを確認（検定）する方法を学習します。つまり、同じものとして扱っていいのか、悪いのかを調べるときです。ポイントは“分散（バラツキ)”を確認して、さらに“平均値”を確認します。4.2 で学習した精度の話しを思い出してください。



6.1　等分散の検定手順（分散の差を検定する）

H：Hypothesis

１）　仮説の設定　H_0：　$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

２）　不偏分散　V_x ，V_y　を求める。その自由度を　ϕ_x ，ϕ_y　とする。
　　　ただし、　$\phi_x = n_x - 1$, $\phi_y = n_y - 1$

３）　分散比を求める。　　（↑　n はデータの個数）

$V_x \geqq V_y$　のとき　　$F_0 = \dfrac{V_x}{V_y}$　　（← 要するに、分子に大きい方をとり F_0 が１より大きくなるようにする）

$\phi_1 = \phi_x$，$\phi_2 = \phi_y$　とする

$V_x < V_y$　のとき　　$F_0 = \dfrac{V_y}{V_x}$

$\phi_1 = \phi_y$，$\phi_2 = \phi_x$　とする

【危険率5%の意味】
5%は 5/100→1/20 より 20 回に１回は、間違うかもしれないという意味。
この場合 P20 の F 表で、もし危険率１%で行なうなら P19 の F 表で検定。

４）　判定する。　F 表の横の行　F 表のグラフの $\dfrac{\alpha}{2}$

$F_0 \geqq F_{\phi 2}^{\phi 1}(0.025)$ ならば、仮説 H_0 を棄却する。（危険率５%）
（つまり、イコールでない）　α

F 表の縦列

例題１　炭素鋼中の炭素の量を調べるのにいくつかの方法があるが、装置の都合でA、Bの二つの方法で実験した。
以下のデータは、同一サンプルをA法で８回、B法で９回分析して得られたものである。分散に違いがあるといえるか？

A法：0.0358、0.0402、0.0385、0.0345、0.0373、
　　　0.0357、0.0356、0.0364　（%）

B法：0.0364、0.0359、0.0364、0.0359、0.0358、
　　　0.0363、0.0363、0.0362、0.0360　（%）

（例題１の解答）

１）　仮説の設定　　H_0：　$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

２）　平均　　　$\bar{x}$ ＝0．03675　　　　$\bar{y}$ ＝0．03613

平方和　　S_x ＝2380×10^{-8}　　　S_y ＝44．0×10^{-8}

不偏分散　V_x ＝340×10^{-8}　　　V_y ＝5．50×10^{-8}

自由度　　$\phi_x = 7$　　　　　$\phi_y = 8$

３）　V_x ＞ V_y であるから

$$F_0 = \frac{V_x}{V_y} = \frac{340\times10^{-8}}{5.50\times10^{-8}} = 61.8$$

$\phi_1 = \phi_x = 7$ ，$\phi_2 = \phi_y = 8$

４）　$F_0 = 61.8 \geqq F_8^7(0.025) = 4.53$

（↑例は危険率 5%で検定したので P20 の F 表より）

よって、仮説 H_0 は棄却される。すなわち、$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$　**でない**といえる。（危険率５％）

別の表現では、

「危険率５％でＡ法とＢ法には分散に違いがある」などと言います。

また、５％で有意差あり、５％有意差あり、５％有意　など、言葉が省略される場合の表現もあります。これらは全て分散に違いがあることを意味します。全体の流れから言葉を判断します。

（有意差：Significant）

一方、検定の結果その反対の検定結果が得られた（等しい）場合は、有意差がない、有意差なし、棄却されない、などの表現が用いられます。

P7 参照

平方和の求め方

$$S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$$

分散の求め方

$$V = \frac{S}{\phi} = \frac{S}{n-1}$$

（←　n はデータの個数）

水準間
(分子)

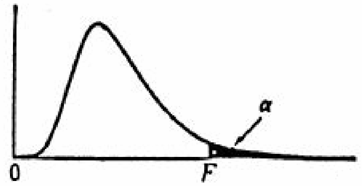
水準：分散分析

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(\alpha)$

$\alpha=\begin{cases}0\cdot05 \cdots \text{細字}\\ 0\cdot01 \cdots \text{太字}\end{cases}$

F　表（5％，1％）（危険率10％，2％）

$$\alpha=\int_F^\infty \frac{\phi_1^{\frac{\phi_1}{2}}\phi_2^{\frac{\phi_2}{2}}X^{\frac{\phi_1}{2}-1}}{B\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)(\phi_1X+\phi_2)^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}}dX$$



（自由度 ϕ_1, ϕ_2 から，上側確率 5% および 1% に対する F の値を求める表）（細字は５％，太字は１％）

ϕ_1
ϕ_2↓

水準内
(分母)

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	161·	200·	216·	225·	230·	234·	237·	239·	241·	242·	244·	246·	248·	249·	250·	251·	252·	253·	254·	1
	4052·	**5000·**	**5403·**	**5625·**	**5764·**	**5859·**	**5928·**	**5982·**	**6022·**	**6056·**	**6106·**	**6157·**	**6209·**	**6235·**	**6261·**	**6287·**	**6313·**	**6339·**	**6366·**	
2	18·5	19·0	19·2	19·2	19·3	19·3	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·4	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5	19·5	2
	98·5	**99·0**	**99·2**	**99·2**	**99·3**	**99·3**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·4**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	**99·5**	
3	10·1	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62	8·59	8·57	8·55	8·53	3
	34·1	**30·8**	**29·5**	**28·7**	**28·2**	**27·9**	**27·7**	**27·5**	**27·3**	**27·2**	**27·1**	**26·9**	**26·7**	**26·6**	**26·5**	**26·4**	**26·3**	**26·2**	**26·1**	
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75	5·72	5·69	5·66	5·63	4
	21·2	**18·0**	**16·7**	**16·0**	**15·5**	**15·2**	**15·0**	**14·8**	**14·7**	**14·5**	**14·4**	**14·2**	**14·0**	**13·9**	**13·8**	**13·7**	**13·7**	**13·6**	**13·5**	
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50	4·46	4·43	4·40	4·36	5
	16·3	**13·3**	**12·1**	**11·4**	**11·0**	**10·7**	**10·5**	**10·3**	**10·2**	**10·1**	**9·89**	**9·72**	**9·55**	**9·47**	**9·38**	**9·29**	**9·20**	**9·11**	**9·02**	
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81	3·77	3·74	3·70	3·67	6
	13·7	**10·9**	**9·78**	**9·15**	**8·75**	**8·47**	**8·26**	**8·10**	**7·98**	**7·87**	**7·72**	**7·56**	**7·40**	**7·31**	**7·23**	**7·14**	**7·06**	**6·97**	**6·88**	
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38	3·34	3·30	3·27	3·23	7
	12·2	**9·55**	**8·45**	**7·85**	**7·46**	**7·19**	**6·99**	**6·84**	**6·72**	**6·62**	**6·47**	**6·31**	**6·16**	**6·07**	**5·99**	**5·91**	**5·82**	**5·74**	**5·65**	
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08	3·04	3·01	2·97	2·93	8
	11·3	**8·65**	**7·59**	**7·01**	**6·63**	**6·37**	**6·18**	**6·03**	**5·91**	**5·81**	**5·67**	**5·52**	**5·36**	**5·28**	**5·20**	**5·12**	**5·03**	**4·95**	**4·86**	
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86	2·83	2·79	2·75	2·71	9
	10·6	**8·02**	**6·99**	**6·42**	**6·06**	**5·80**	**5·61**	**5·47**	**5·35**	**5·26**	**5·11**	**4·96**	**4·81**	**4·73**	**4·65**	**4·57**	**4·48**	**4·40**	**4·31**	
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·84	2·77	2·74	2·70	2·66	2·62	2·58	2·54	10
	10·0	**7·56**	**6·55**	**5·99**	**5·64**	**5·39**	**5·20**	**5·06**	**4·94**	**4·85**	**4·71**	**4·56**	**4·41**	**4·33**	**4·25**	**4·17**	**4·08**	**4·00**	**3·91**	
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40	11
	9·65	**7·21**	**6·22**	**5·67**	**5·32**	**5·07**	**4·89**	**4·74**	**4·63**	**4·54**	**4·40**	**4·25**	**4·10**	**4·02**	**3·94**	**3·86**	**3·78**	**3·69**	**3·60**	
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47	2·43	2·38	2·34	2·30	12
	9·33	**6·93**	**5·95**	**5·41**	**5·06**	**4·82**	**4·64**	**4·50**	**4·39**	**4·30**	**4·16**	**4·01**	**3·86**	**3·78**	**3·70**	**3·62**	**3·54**	**3·45**	**3·36**	
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38	2·34	2·30	2·25	2·21	13
	9·07	**6·70**	**5·74**	**5·21**	**4·86**	**4·62**	**4·44**	**4·30**	**4·19**	**4·10**	**3·96**	**3·82**	**3·66**	**3·59**	**3·51**	**3·43**	**3·34**	**3·25**	**3·17**	
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31	2·27	2·22	2·18	2·13	14
	8·86	**6·51**	**5·56**	**5·04**	**4·70**	**4·46**	**4·28**	**4·14**	**4·03**	**3·94**	**3·80**	**3·66**	**3·51**	**3·43**	**3·35**	**3·27**	**3·18**	**3·09**	**3·00**	
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25	2·20	2·16	2·11	2·07	15
	8·68	**6·36**	**5·42**	**4·89**	**4·56**	**4·32**	**4·14**	**4·00**	**3·89**	**3·80**	**3·67**	**3·52**	**3·37**	**3·29**	**3·21**	**3·13**	**3·05**	**2·96**	**2·87**	

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	16
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	17
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	18
	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	19
	6.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	20
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	21
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	22
	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	23
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	24
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	25
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	26
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	27
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	28
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64	29
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	30
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	40
	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	60
	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	120
	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	∞
	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	

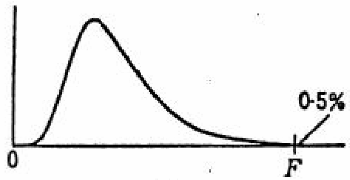
例 1.　自由度 $\phi_1=5$, $\phi_2=10$ の F 分布の（上側）5％の点は 3.33, 1％の点は 5.64 である.

例 2.　自由度 (5, 10)の F 分布の下側 5％の点を求めるには, $\phi_1=10$, $\phi_2=5$ に対して表を読んで4.74を得, その逆数をとって1/4.74とする.

注　自由度の大きいところでの補間は 120/ϕ を用いる 1 次補間による
($\phi > 30$)

F 表 (0·5 %)

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(0{\cdot}005)$ （自由度 ϕ_1, ϕ_2 の F 分布の上側 0·5% の点を求める表） （危険率1%）



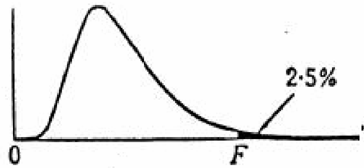
ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1																				1
2	198·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	199·	200·	2
3	55·6	49·8	47·5	46·2	45·4	44·8	44·4	44·1	43·9	43·7	43·4	43·1	42·8	42·6	42·5	42·3	42·1	42·0	41·8	3
4	31·3	26·3	24·3	23·2	22·5	22·0	21·6	21·4	21·1	21·0	20·7	20·4	20·2	20·0	19·9	19·8	19·6	19·5	19·3	4
5	22·8	18·3	16·5	15·6	14·9	14·5	14·2	14·0	13·8	13·6	13·4	13·1	12·9	12·8	12·7	12·5	12·4	12·3	12·1	5
6	18·6	14·5	12·9	12·0	11·5	11·1	10·8	10·6	10·4	10·2	10·0	9·81	9·59	9·47	9·36	9·24	9·12	9·00	8·88	6
7	16·2	12·4	10·9	10·0	9·52	9·16	8·89	8·68	8·51	8·38	8·18	7·97	7·75	7·64	7·53	7·42	7·31	7·19	7·08	7
8	14·7	11·0	9·60	8·81	8·30	7·95	7·69	7·50	7·34	7·21	7·01	6·81	6·61	6·50	6·40	6·29	6·18	6·06	5·95	8
9	13·6	10·1	8·72	7·96	7·47	7·13	6·88	6·69	6·54	6·42	6·23	6·03	5·83	5·73	5·62	5·52	5·41	5·30	5·19	9
10	12·8	9·43	8·08	7·34	6·87	6·54	6·30	6·12	5·97	5·85	5·66	5·47	5·27	5·17	5·07	4·97	4·86	4·75	4·64	10
11	12·2	8·91	7·60	6·88	6·42	6·10	5·86	5·68	5·54	5·42	5·24	5·05	4·86	4·76	4·65	4·55	4·44	4·34	4·23	11
12	11·8	8·51	7·23	6·52	6·07	5·76	5·52	5·35	5·20	5·09	4·91	4·72	4·53	4·43	4·33	4·23	4·12	4·01	3·90	12
13	11·4	8·19	6·93	6·23	5·79	5·48	5·25	5·08	4·94	4·82	4·64	4·46	4·27	4·17	4·07	3·97	3·87	3·76	3·65	13
14	11·1	7·92	6·68	6·00	5·56	5·26	5·03	4·86	4·72	4·60	4·43	4·25	4·06	3·96	3·86	3·76	3·66	3·55	3·44	14
15	10·8	7·70	6·48	5·80	5·37	5·07	4·85	4·67	4·54	4·42	4·25	4·07	3·88	3·79	3·69	3·58	3·48	3·37	3·26	15
16	10·6	7·51	6·30	5·64	5·21	4·91	4·69	4·52	4·38	4·27	4·10	3·92	3·73	3·64	3·54	3·44	3·33	3·22	3·11	16
17	10·4	7·35	6·16	5·50	5·07	4·78	4·56	4·39	4·25	4·14	3·97	3·79	3·61	3·51	3·41	3·31	3·21	3·10	2·98	17
18	10·2	7·21	6·03	5·37	4·96	4·66	4·44	4·28	4·14	4·03	3·86	3·68	3·50	3·40	3·30	3·20	3·10	2·99	2·87	18
19	10·1	7·09	5·92	5·27	4·85	4·56	4·34	4·18	4·04	3·93	3·76	3·59	3·40	3·31	3·21	3·11	3·00	2·89	2·78	19
20	9·94	6·99	5·82	5·17	4·76	4·47	4·26	4·09	3·96	3·85	3·68	3·50	3·32	3·22	3·12	3·02	2·92	2·81	2·69	20
21	9·83	6·89	5·73	5·09	4·68	4·39	4·18	4·01	3·88	3·77	3·60	3·43	3·24	3·15	3·05	2·95	2·84	2·73	2·61	21
22	9·73	6·81	5·65	5·02	4·61	4·32	4·11	3·94	3·81	3·70	3·54	3·36	3·18	3·08	2·98	2·88	2·77	2·66	2·55	22
23	9·63	6·73	5·58	4·95	4·54	4·26	4·05	3·88	3·75	3·64	3·47	3·30	3·12	3·02	2·92	2·82	2·71	2·60	2·48	23
24	9·55	6·66	5·52	4·89	4·49	4·20	3·99	3·83	3·69	3·59	3·42	3·25	3·06	2·97	2·87	2·77	2·66	2·55	2·43	24
25	9·48	6·60	5·46	4·84	4·43	4·15	3·94	3·78	3·64	3·54	3·37	3·20	3·01	2·92	2·82	2·72	2·61	2·50	2·38	25
26	9·41	6·54	5·41	4·79	4·38	4·10	3·89	3·73	3·60	3·49	3·33	3·15	2·97	2·87	2·77	2·67	2·56	2·45	2·33	26
27	9·34	6·49	5·36	4·74	4·34	4·06	3·85	3·69	3·56	3·45	3·28	3·11	2·93	2·83	2·73	2·63	2·52	2·41	2·29	27
28	9·28	6·44	5·32	4·70	4·30	4·02	3·81	3·65	3·52	3·41	3·25	3·07	2·89	2·79	2·69	2·59	2·48	2·37	2·25	28
29	9·23	6·40	5·28	4·66	4·26	3·98	3·77	3·61	3·48	3·38	3·21	3·04	2·86	2·76	2·66	2·56	2·45	2·33	2·21	29
30	9·18	6·35	5·24	4·62	4·23	3·95	3·74	3·58	3·45	3·34	3·18	3·01	2·82	2·73	2·63	2·52	2·42	2·30	2·18	30
40	8·83	6·07	4·98	4·37	3·99	3·71	3·51	3·35	3·22	3·12	2·95	2·78	2·60	2·50	2·40	2·30	2·18	2·06	1·93	40
60	8·49	5·80	4·73	4·14	3·76	3·49	3·29	3·13	3·01	2·90	2·74	2·57	2·39	2·29	2·19	2·08	1·96	1·83	1·69	60
120	8·18	5·54	4·50	3·92	3·55	3·28	3·09	2·93	2·81	2·71	2·54	2·37	2·19	2·09	1·98	1·87	1·75	1·61	1·43	120
∞	7·88	5·30	4·28	3·72	3·35	3·09	2·90	2·74	2·62	2·52	2·36	2·19	2·00	1·90	1·79	1·67	1·53	1·36	1·00	∞
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2

例 1. 自由度(5, 10)の F 分布の上側 0·5 %の点は 6·87 である.　例 2. 自由度(5, 10)の F 分布の下側 0·5 %の点は 1/13·6 である.

$F^{\phi_1}_{\phi_2}(0·025)$

F　表　(2·5 %)

（自由度 ϕ_1, ϕ_2 の F 分布の上側 2·5 %の点を求める表）（危険率5%）



ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	648·	800·	864·	900·	922·	937·	948·	957·	963·	969·	977·	985·	993·	997·	1001·	1006·	1010·	1014·	1018·	1
2	38·5	39·0	39·2	39·2	39·3	39·3	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·4	39·5	39·5	39·5	39.5	39·5	39·5	2
3	17·4	16·0	15·4	15·1	14·9	14·7	14·6	14·5	14·5	14·4	14·3	14·3	14·2	14·1	14·1	14·0	14·0	13·9	13·9	3
4	12·2	10·6	9·98	9·60	9·36	9·20	9·07	8·98	8·90	8·84	8·75	8·66	8·56	8·51	8·46	8·41	8·36	8·31	8·26	4
5	10·0	8·43	7·76	7·39	7·15	6·98	6·85	6·76	6·68	6·62	6·52	6·43	6·33	6·28	6·23	6·18	6·12	6·07	6·02	5
6	8·81	7·26	6·60	6·23	5·99	5·82	5·70	5·60	5·52	5·46	5·37	5·27	5·17	5·12	5·07	5·01	4·96	4·90	4·85	6
7	8·07	6·54	5·89	5·52	5·29	5·12	4·99	4·90	4·82	4·76	4·67	4·57	4·47	4·42	4·36	4·31	4·25	4·20	4·14	7
8	7·57	6·06	5·42	5·05	4·82	4·65	4·53	4·43	4·36	4·30	4·20	4·10	4·00	3·95	3·89	3·84	3·78	3·73	3·67	8
9	7·21	5·71	5·08	4·72	4·48	4·32	4·20	4·10	4·03	3·96	3·87	3·77	3·67	3·61	3·56	3·51	3·45	3·39	3·33	9
10	6·94	5·46	4·83	4·47	4·24	4·07	3·95	3·85	3·78	3·72	3·62	3·52	3·42	3·37	3·31	3·26	3·20	3·14	3·08	10
11	6·72	5·26	4·63	4·28	4·04	3·88	3·76	3·66	3·59	3·53	3·43	3·33	3·23	3·17	3·12	3·06	3·00	2·94	2·88	11
12	6·55	5·10	4·47	4·12	3·89	3·73	3·61	3·51	3·44	3·37	3·28	3·18	3·07	3·02	2·96	2·91	2·85	2·79	2·72	12
13	6·41	4·97	4·35	4·00	3·77	3·60	3·48	3·39	3·31	3·25	3·15	3·05	2·95	2·89	2·84	2·78	2·72	2·66	2·60	13
14	6·30	4·86	4·24	3·89	3·66	3·50	3·38	3·29	3·21	3·15	3·05	2·95	2·84	2·79	2·73	2·67	2·61	2·55	2·49	14
15	6·20	4·76	4·15	3·80	3·58	3·41	3·29	3·20	3·12	3·06	2·96	2·86	2·76	2·70	2·64	2·58	2·52	2·46	2·40	15
16	6·12	4·69	4·08	3·73	3·50	3·34	3·22	3·12	3·05	2·99	2·89	2·79	2·68	2·63	2·57	2·51	2·45	2·38	2·32	16
17	6·04	4·62	4·01	3·66	3·44	3·28	3·16	3·06	2·98	2·92	2·82	2·72	2·62	2·56	2·50	2·44	2·38	2·32	2·25	17
18	5·98	4·56	3·95	3·61	3·38	3·22	3·10	3·01	2·93	2·87	2·77	2·67	2·56	2·50	2·44	2·38	2·32	2·26	2·19	18
19	5·92	4·51	3·90	3·56	3·33	3·17	3·05	2·96	2·88	2·82	2·72	2·62	2·51	2·45	2·39	2·33	2·27	2·20	2·13	19
20	5·87	4·46	3·86	3·51	3·29	3·13	3·01	2·91	2·84	2·77	2·68	2·57	2·46	2·41	2·35	2·29	2·22	2·16	2·09	20
21	5·83	4·42	3·82	3·48	3·25	3·09	2·97	2·87	2·80	2·73	2·64	2·53	2·42	2·37	2·31	2·25	2·18	2·11	2·04	21
22	5·79	4·38	3·78	3·44	3·22	3·05	2·93	2·84	2·76	2·70	2·60	2·50	2·39	2·33	2·27	2·21	2·14	2·08	2·00	22
23	5·75	4·35	3·75	3·41	3·18	3·02	2·90	2·81	2·73	2·67	2·57	2·47	2·36	2·30	2·24	2·18	2·11	2·04	1·97	23
24	5·72	4·32	3·72	3·38	3·15	2·99	2·87	2·78	2·70	2·64	2·54	2·44	2·33	2·27	2·21	2·15	2·08	2·01	1·94	24
25	5·69	4·29	3·69	3·35	3·13	2·97	2·85	2·75	2·68	2·61	2·51	2·41	2·30	2·24	2·18	2·12	2·05	1·98	1·91	25
26	5·66	4·27	3·67	3·33	3·10	2·94	2·82	2·73	2·65	2·59	2·49	2·39	2·28	2·22	2·16	2·09	2·03	1·95	1·88	26
27	5·63	4·24	3·65	3·31	3·08	2·92	2·80	2·71	2·63	2·57	2·47	2·36	2·25	2·19	2·13	2·07	2·00	1·93	1·85	27
28	5·61	4·22	3·63	3·29	3·06	2·90	2·78	2·69	2·61	2·55	2·45	2·34	2·23	2·17	2·11	2·05	1·98	1·91	1·83	28
29	5·59	4·20	3·61	3·27	3·04	2·88	2·76	2·67	2·59	2·53	2·43	2·32	2·21	2·15	2·09	2·03	1·96	1·89	1·81	29
30	5·57	4·18	3·59	3·25	3·03	2·87	2·75	2·65	2·57	2·51	2·41	2·31	2·20	2·14	2·07	2·01	1·94	1·87	1·79	30
40	5·42	4·05	3·46	3·13	2·90	2·74	2·62	2·53	2·45	2·39	2·29	2·18	2·07	2·01	1·94	1·88	1·80	1·72	1·64	40
60	5·29	3·93	3·34	3·01	2·79	2·63	2·51	2·41	2·33	2·27	2·17	2·06	1·94	1·88	1·82	1·74	1·67	1·58	1·48	60
120	5·15	3·80	3·23	2·89	2·67	2·52	2·39	2·30	2·22	2·16	2·05	1·94	1·82	1·76	1·69	1·61	1·53	1·43	1·31	120
∞	5·02	3·69	3·12	2·79	2·57	2·41	2·29	2·19	2·11	2·05	1·94	1·83	1·71	1·64	1·57	1·48	1·39	1·27	1·00	∞
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 \ ϕ_2

例 1.　自由度 (5, 10) の F 分布の上側 2·5 %の点は 4·24 である．　例 2.　自由度 (5, 10) の F 分布の下側 2·5 % の点は 1/6·62 である．

6.2　二つの母平均の差の検定手順（σが未知で、“等分散”の場合(6.1 の方法)）

1）　仮説の設定　　H_0：　$\mu_A = \mu_B$　　（二つの母平均は同じ）

2）　平均値 $\bar{x}$, $\bar{y}$　、平方和 S_x, S_y　および自由度を ϕ_x ，ϕ_y を求める

3）　次の式で $\hat{\sigma}$ (ハット) を求める。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S_x + S_y}{\phi_x + \phi_y}}$$

4）　次の式で t_0 を求める。

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right) \cdot \hat{\sigma}}}$$

5）　判定する

$|t_0| \geqq t(\phi_x + \phi_y\ , 0.05)$ ならば、二つの母平均 μ_x と μ_y には差があるといえる。（危険率５％）　　　危険率：Level of Significance

注１　危険率１％ で検定するときは $t(\phi_x + \phi_y\ , 0.01)$ を用いる。

注２　σ_x と σ_y とが違うかどうかはっきりしない場合は、6.1 の方法で等分散の検定を行う。有意となったときは、次項の「分散の異なる場合」の方法を用いる。

例題２　A 社の市場調査課では、自社の食糧品と市場で競合している B 社の製品との比較をするため、自社（A 社）製品と B 社製品をランダムに抜き取って濃度を測定した。濃度はこの製品の重要な品質特性で、もし A 社の方が低いならば濃度を上げる必要がある。

A 社：　9.1、8.1、9.1、9.0、7.8、9.4、8.2、9.1、8.2、9.3

B 社：　8.2、8.6、7.8、7.6、8.4、8.6、8.0、8.1、8.8、8.0　（%）

（例題２の解答）

まず、バラツキの違いについて情報がないので、最初に分散の違いを検定する。

1） H_0： $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

2） 平均 $\bar{x}_A$＝ 8.73 $\bar{x}_B$＝ 8.21
平方和 S_A＝ 3.081 S_B＝ 1.329
不偏分散 V_A＝0.342 V_B＝0.148
自由度 ϕ_A＝9 ϕ_B＝9

3） V_A ＞ V_B であるから

$$F_0 = \frac{V_A}{V_B} = \frac{0.342}{0.148} = 2.31$$

4） $F_0 < F_9^9(0.025) = 4.03$ であるから仮説は捨てられない。
つまり、$\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ 一応等分散の仮定は成り立つものとして、母平均の差の検定を行う。

次に、**等分散の場合の母平均の差の検定**を行う。

1） H_0： $\mu_A = \mu_B$

2） $\bar{x}_A$= 8.73 , S_A= 3.081
$\bar{x}_B$= 8.21 , S_B= 1.329

3） $$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{3.081 + 1.329}{9 + 9}} = 0.495$$

4） $$t_0 = \frac{8.73 - 8.21}{\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \times 0.495}} = \mathbf{2.35}$$

5） 判定 （t 表より）

$t_0 > t(18, 0.05) =$ **2.101** であるから、平均に有意差がある。
つまり、（危険率 5%で）平均値に差があることがわかった。

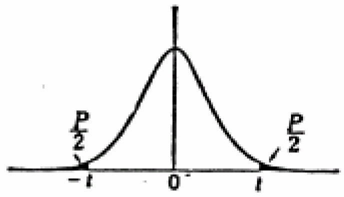
（結論として）
$\bar{x}_A$ のほうが大きい値と検定できたので、A 社のほうが濃度が高いことがわかり、従来通りの製造を行うことにする、と判断した。

t 表

$\phi,\ P \rightarrow t$

（自由度 ϕ と両側確率 P とから t を求める表）

$$P=2\int_t^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right)dv}{\sqrt{\phi\pi}\,\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(1+\frac{v^2}{\phi}\right)^{\frac{\phi+1}{2}}}$$



ϕ \ P	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·05	0·02	0·01	0·001	P / ϕ
1	1·000	1·376	1·963	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657	636·619	1
2	0·816	1·061	1·386	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925	31·598	2
3	0·765	0·978	1·250	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841	12·941	3
4	0·741	0·941	1·190	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604	8·610	4
5	0·727	0·920	1·156	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032	6·859	5
6	0·718	0·906	1·134	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707	5·959	6
7	0·711	0·896	1·119	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499	5·405	7
8	0·706	0·889	1·108	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355	5·041	8
9	0·703	0·883	1·100	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250	4·781	9
10	0·700	0·879	1·093	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169	4·587	10
11	0·697	0·876	1·088	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106	4·437	11
12	0·695	0·873	1·083	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055	4·318	12
13	0·694	0·870	1·079	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012	4·221	13
14	0·692	0·868	1·076	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977	4·140	14
15	0·691	0·866	1·074	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947	4·073	15
16	0·690	0·865	1·071	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921	4·015	16
17	0·689	0·863	1·069	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898	3·965	17
18	0·688	0·862	1·067	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878	3·922	18
19	0·688	0·861	1·066	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861	3·883	19
20	0·687	0·860	1·064	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845	3·850	20
21	0·686	0·859	1·063	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831	3·819	21
22	0·686	0·858	1·061	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819	3·792	22
23	0·685	0·858	1·060	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807	3·767	23
24	0·685	0·857	1·059	1·318	1·711	2·064	2·492	2·797	3·745	24
25	0·684	0·856	1·058	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787	3·725	25
26	0·684	0·856	1·058	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779	3·707	26
27	0·684	0·855	1·057	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771	3·690	27
28	0·683	0·855	1·056	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763	3·674	28
29	0·683	0·854	1·055	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756	3·659	29
30	0·683	0·854	1·055	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750	3·646	30
40	0·681	0·851	1·050	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704	3·551	40
60	0·679	0·848	1·046	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660	3·460	60
120	0·677	0·845	1·041	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617	3·373	120
∞	0·674	0·842	1·036	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576	3·291	∞

例　$\phi=10$, $P=0{\cdot}05$ に対する t の値は，2·228 である．これは自由度 10 の t 分布に従う確率変数が 2·228 以上の絶対値をもって出現する確率が 5 %であることを示す．

注 1. $\phi>30$ に対しては $120/\phi$ を用いる 1 次補間が便利である．

注 2. 表から読んだ値を $t(\phi, P)$, $t_P(\phi)$, $t_\phi(P)$ などと記すことがある．

～ MEMO ～

6.3　二つの母平均の差の検定手順（σが未知で、“異分散”の場合）

（6.1 の方法で分散に差があるとき）

1）　仮説の設定　　H_0：　$\mu_x = \mu_y$　　（二つの母平均は同じ）

2）　平均値$\bar{x}$, $\bar{y}$　、平方和S_x, S_y　および自由度をϕ_x　，　ϕ_yを求める。

3）　次へ（6.2 のこの部分は省略）

4）　次の式で　t_0 を求める。

（バラツキがはっきりしていたり、等分散の検定で有意となった（分散の差がある）場合には次式を用いる）

$$t_0 = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\dfrac{V_x}{n_x}+\dfrac{V_y}{n_y}}}$$

を用いてｔ検定を行えばよい。このときの自由度ϕ は次式から定める。

$$\frac{1}{\phi} = \frac{c^2}{\phi_x} + \frac{(1-c)^2}{\phi_y} \qquad \text{ここで} \quad c = \frac{V_x}{n_x} \Bigg/ \left(\frac{V_x}{n_x}+\frac{V_y}{n_y}\right)$$

5）　判定する。

$|t_0| \geqq t(\phi, 0.05)$ ならば、二つの母平均μ_xとμ_yには差があるといえる。

（危険率５％）

注１　危険率１％ で検定するときは $t(\phi$ ，　$0.01)$を用いる。

注２　σ_xとσ_y とが違うかどうかはっきりしない場合、6.1 の方法で等分散の検定を行う。有意でなかったとき（等分散のとき）は、前項の「分散が等しい場合」の方法を用いる。

例題３　従来の成分分析の方法(A)を簡易分析法(B)に切り替えることを検討している。簡易法は精度が悪いことはわかっているが、分析回数を多くして推定の精度を必要なだけあげることを考えている。しかし、推定値にカタヨリがあると困るので平均に差があるかどうかを検討することになった。従来のＡ法で５回、新簡易法のＢ法で 10 回分析して、次の結果が得られた。

Ａ法：　45.16、45.15、45.14、45.20、45.12

Ｂ法：　45.30、45.19、45.28、45.25、45.40、
45.39、45.11、45.31、45.20、45.42

さて、この２つの方法の母平均に差があると言えるか？

（例題３の解答）

等分散の検定

平均　　$\bar{x}_A = 45.154$　　　$\bar{x}_B = 45.285$

平方和　$S_A = 0.00352$　　　$S_B = 0.09145$

不偏分散　$V_A = \dfrac{0.00352}{4} = 0.00088$　　　$V_B = \dfrac{0.09145}{9} = 0.01016$

自由度　$\phi_A = 4$　、　$\phi_B = 9$

$V_B > V_A$ であるから

$$F_0 = \frac{V_B}{V_A} = \frac{0.01016}{0.00088} = 11.55$$

F 表を参照

$F_0 \geqq F_4^9(0.025) = 8.90$　であるから、分散が違うことが確認できた。

平均の差の検定

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{V_A}{n_A} + \dfrac{V_B}{n_B}}} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\dfrac{V_A}{5} + \dfrac{V_B}{10}}} = \frac{45.154 - 45.285}{\sqrt{\dfrac{0.00088}{5} + \dfrac{0.01016}{10}}} = \frac{-0.131}{0.0345} = -3.80$$

$$c = \frac{V_A}{5} \Bigg/ \left(\frac{V_A}{5} + \frac{V_B}{10}\right) = \frac{0.00088}{5} \Bigg/ \left(\frac{0.00088}{5} + \frac{0.01016}{10}\right) = 0.148$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{0.148^2}{4} + \frac{(1-0.148)^2}{9} = 0.0862$$

$$\phi = \frac{1}{0.0862} = 11.6$$ （←これが自由度）

$t(11.6\ ,0.05) = 2.188$　（t 表より）

$t(11.6\ ,0.05)$ の探し方と値の求め方

$t(11\ ,0.05) = 2.201$

$t(12\ ,0.05) = 2.179$

両者の差分

$t(11.6\ ,0.05)$

$= 2.201 - (0.022 \times 0.6)$

$= 2.1878$

$\fallingdotseq$ 2.188

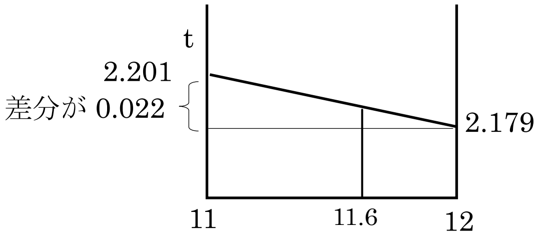
$|t_0| > t(11.6\ ,0.05)$ であるから平均の差は有意である。（危険率５％）

（つまり、差がある）

（結論として）

平均値に差があるので、簡易法を用いるためには、平均値のカタヨリを補正する方法をさらに検討することにした。

補間法について（自由度 ϕ が表にない桁の値を読む場合の一次補間法）



差分 0.022×0.6 で補間的に求める

Ⅶ　計測実験

＜実験方法＞

①　適当に（指示された）２人から３人程度のグループに分かれます。

②　教員から指定された数(10 個程度)の同種類の計測対象物（サンプル）を準備します。

注意：サンプルを一組決めたら、最後までそのサンプルをそのグループで使用してください。

③　以下の指定された計測機器を使って、上記の対象物をグループ内で融通しながら、寸法を測り、記録表にデータを記録します。このとき、同じものを複数回、計測しないように注意してください。

④ それぞれの計測機器で得られたデータから、中央値、範囲、平均値、標準偏差 … などを算出し、次頁の記入表中に記録します。

⑤ 分析結果（算出した結果）をグループ内のメンバーで共有し、それぞれの共同実験者の記録を自分の記録欄に転記します。

⑥　計測結果のバラツキや標準偏差、データ間の各検定など、様々な角度で調べることができるので（例えば、計測機器の違いによる分析や、ある計測機器についての他人のデータとの比較など、データ内、データ間、いろいろ考えられる)、このテキストで学習した分析方法などを見直しながら、自分なりの視点で比較した場合の考察をレポートにまとめてください。

（注意：分析の組合せが多いので、自分で決めた比較・分析を１パターン決めて考えれば（考察すれば）よい。）

＜使用する計測機器＞

・計測実験１　（鋼尺）

・計測実験２　（ノギス）

・計測実験３　（マイクロメータ）

・計測実験４　 （ハイトゲージ）

Ⅷ　計測結果記入表（個人が計測した結果を記入する）

データ No	サンプル（　　　　　）				備考
	鋼尺（ｽｹｰﾙ）	ノギス	マイクロメータ	ハイトゲージ	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
１０					
データ数 n					
中央値 $\tilde{x}$					
範囲 R					
平均 $\bar{x}$					
平方和 S					
不偏分散 V					
標準偏差 σ					
68%確率の範囲 ＋					
68%確率の範囲 −					
95%確率の範囲 ＋					
95%確率の範囲 −					

7.2　グループ内で共有する計測結果表

共同実験者	処理項目	サンプル（　　　　　）			
		鋼尺(ｽｹｰﾙ)	ノギス	マイクロメータ	ハイトゲージ
（氏名）	データ数 n				
	中央値 $\tilde{x}$				
	範囲 R				
	平均 $\bar{x}$				
	平方和 S				
	不偏分散 V				
	標準偏差 σ				
	68%確率 ＋				
	の範囲 −				
	95%確率 ＋				
	の範囲 −				
（氏名）	データ数 n				
	中央値 $\tilde{x}$				
	範囲 R				
	平均 $\bar{x}$				
	平方和 S				
	不偏分散 V				
	標準偏差 σ				
	68%確率 ＋				
	の範囲 −				
	95%確率 ＋				
	の範囲 −				

Ⅸ　課 題

問１　統計処理について次の問に答えなさい．回答はレポート用紙にすること。

(1) 目盛りの付いた測定器具を用いた場合，目盛りのどこまで読むか答えなさい。

(2) 目盛りの範囲で測定値を読むことを何と言うか答えなさい。
　また，最小目盛り以下をだいたいで読むことを何と言うか答えなさい。

(3) 正確度と、精度とは何か，それぞれ答えなさい。

(4) 測定値や実験値はいつも一定になるとは限らない。
そこで，数値の扱い方として，測定値を並べてその中央になる $\boxed{①\quad\quad}$ や，最大と最小値の差で表す $\boxed{②\quad\quad}$ や，測定値の合計をその数で割った $\boxed{③\quad\quad}$ などがある。
また，測定値のばらつき具合を数値で表す $\boxed{④\quad\quad}$ は統計学上，重要である。
これは不偏分散を求め，これの平方根から計算する。

(5) ある計測を行った。
　５１m，５０m，５３m，４９m，４７mの測定値が得られたときの
　中心値 $\tilde{x}$，範囲 R，平均値 $\bar{x}$ を答えなさい。

(6) 不偏分散 V を求める式を解答欄に書きなさい。(ただし、n-1 の計算式)

(7) 標準偏差 σ を求める式を解答欄に書きなさい。(ただし、n-1 の計算式)

(8) 平均値 $\bar{x}$ に，求めた標準偏差 σ を足し引き（±（ﾌﾟﾗｽﾏｲﾅｽ））した値の範囲は，何パーセントの確率となるか答えなさい。(何パーセントと答える)

(9) 統計計算で求められた範囲が９５％で起こる確率にする場合は，
　標準偏差 σ の何倍を平均値に足し引き（±）すればよいか答えなさい。

解答欄例（レポート用紙に下表に習って解答欄を書き、それに回答すること）

問１　回答欄

<table>
<tr><td colspan="4">(1)</td><td colspan="2">(2-1)</td><td>(2-2)</td></tr>
<tr><td colspan="7">(3)正確度とは</td></tr>
<tr><td colspan="7">精度とは</td></tr>
<tr><td>(4)①</td><td colspan="3">②</td><td colspan="2">③</td><td>④</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5)中心値</td><td colspan="3">範囲</td><td colspan="2">平均値</td></tr>
<tr><td colspan="7">(6)
V =</td></tr>
<tr><td colspan="7">(7)
σ ＝</td></tr>
<tr><td colspan="3">(8)
%</td><td colspan="4">(9)
倍</td></tr>
</table>

問２　Ａさんが試験管内の水溶液の高さを調べた。この調べで、６本の試験管内の水溶液の高さは，各々99mm，100mm，102mm，101mm，98mm，100mmであった．次の手順に沿ってこの測定値の平均値と標準偏差を求め，この高さのバラツキ範囲を確率的に、母集団が不明の場合で解析しなさい。

回答は下記の手順に沿って行い、レポート用紙に計算過程を記入すると共に，その解析結果を下記の解答欄と同じような形態で回答すること。

（ヒント：計算過程）

手順１，平均値を求める。

手順２，次に，不偏分散，標準偏差を求める。ただし，$\sqrt{2}=1.41$　とする。

手順３，求まった標準偏差を平均値にプラスマイナスした範囲を求める。

回答すべき項目

データ数ｎ は，　＿＿＿＿＿＿＿＿　個

平均高さ $\bar{x}$　は，　＿＿＿＿＿＿＿＿　[mm]

標準偏差ｓ　は，　＿＿＿＿＿＿＿＿

また，A さんは、ばらつきの 68%確率の範囲と，95%確率の範囲を各々統計解析した。次の計測結果を言葉でまとめ、欄内のように記載し回答しなさい。（下線部に適語記入する形式で）

計測実験のまとめの回答項目

A さんの測定では，平均　＿＿＿＿＿＿＿＿mm の高さであり，そのばらつきの範囲は、

６８％の確率で，＿＿＿＿＿＿＿＿mm　から＿＿＿＿＿＿＿＿mm の範囲にあり，

９５％の確率では，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ある.

X　報告書（レポート）の書き方とまとめかた

9.1　なぜ，レポートを書かなければならないか

報告書やレポートは大学だけでなく社会でも頻繁に提出を求められます。今，学生諸君が，色々な授業や実験などでレポートの提出を求められるのは，単に宿題をやった証拠として書いているだけではありません。もっと大切な教育のねらいは，君達が社会人になって様々な報告書を提出しなければならないとき，正しい報告書を書けるようになる訓練をしているのです。

では，なぜ報告書にまとめるのでしょうか。その情報に価値がある場合，社会では同じ人が色々な場所にいちいち教えに行くわけにいきません。従って，良い報告書やデータは，次の人達のマニュアル的に，あるいは次にそのまま使えるデータや資料として役割を果たします。ですから報告書は，それを読む人がその報告書を読んで，同じことをやろうとしたとき，同じ事が再現できるようにしておく必要があるのです。そのような報告書にまとまっている報告書が有用な報告書で，価値の高い書類（情報）になります。

9.2　用紙サイズ

一般的には**A4 のレポート用紙**を使用することが多い（本講座でも A4 とする）。
特別な指示がない限り現在は，A4 の用紙を使用する。

9.3　使用する筆記用具や文字について

手書きで報告書をまとめる場合，万年筆，ボールペンなどの筆記用具で，黒のインクを使ったものを使用してください。（本講座は**手書きで作成**してください）

ワープロ等でまとめる場合も，文字は全て黒文字で記載します。フォント（文字の形）は明朝体が一般的です。各項目や章など場合によってゴシック体にする場合もあります。

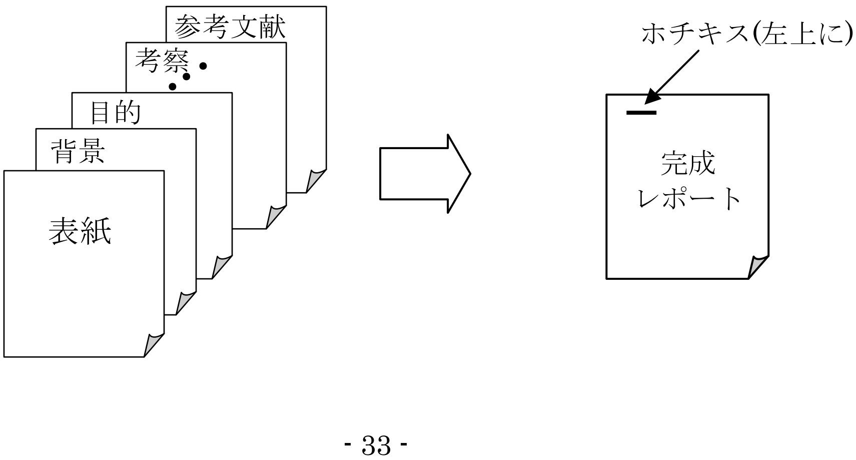
9.4　レポート・報告書のまとめ方と綴じ方

報告書は各項目や章で一枚となるように，そして**他人に見せるもの**なので文字は大きくゆったりとゆとりを持たせて書くのがよいとされています。あまり小さく細かい文字にしないように注意してください。

また，実験レポートなどの場合，「グラフが多いようなときは最後にまとめて」資料としてグラフだけを配置し，「グラフが 1 枚程度の場合は説明の順序」に従って綴じると見る人が見やすくなります。

まとめた用紙は，左上から１ｃｍぐらいの所をホチキスで１箇所とめます。

各項目の記載がすべて書き終わった後，最終的に一部の報告書にまとめる順序は次の通りです。



9.5　記載項目と内容・・　一般的なレポートの内容は次の順番で書きます。

1)　**表紙**　・ 報告書の題名や研究の名称**タイトルや所属・氏名**などを書きます。
（次ページの表紙を参考にすること。コピーも可）

2)　**（背景）**　・・・ 調査内容（や仕事）などの分野で「これまで」「今」どうなっているのか，どういう状況なのかを先行技術として明確にします。
その上でそこにはどういう課題（問題点）があるのかを文章で書き示します。**今回は実習なのでこれは省略**してください。

3)　**目的**　・・・・ この内容（や調査）をなぜ行い，何を，何のために行って，これをどこまでやるのかなどを明らかに示します。

4)　**原理**　　・・・実験や調査方法の理論や理屈，その手法や手段などの解説を一般的に示します。どんな理論や技術で課題を解決するか説明します。

5)　**実験方法**・・・ここでは実験の手順を文章や図を使いながら記載する。これは，このレポートを見た第三者が同じ実験を再現できるように書く気持ちで記録します。（レポートの価値が高まる）

6)　**使用機器(器具)**・・上記の実験方法内で記載するか，または別の項目として実験に使用した器具，機器，材料などの名称，製造会社名，型式や型番，製造番号など記録しておきます。

7)　**実験結果**　・　実験データは表などを使って整理し，多くの場合はそれをグラフにします。グラフにするのは、測定・観測した数値データを視覚的に表し、自分や他人に見やすくするためです。
また，実験結果を書く際には，データをまとめるだけです。つまり，自分の考えや思いなどの主観は一切ありません(書きません)。
今回は、今回の計測結果や共同実験者のデータから、できる範囲で、標準偏差、等分散の差の検定、母平均の差の検定を行ってください。

8)　**結論**・・・・・ 実験結果や検定の結果などから客観的に言えることや、わかったことをこと書き出します。結論では，箇条書きに読みやすくする場合や文章にまとめる場合もあります。ここでも主観(自分の考えや感想)は入りません。

9)　**考察**・・・・・全体を通して、多角的に見て、実験結果や結論を基に考え，わかったことや察したことがらを客観的に、自分の持つ知識を総動員して、まとめます。（感想でない裏付けのある自分の考え方などは含む）

9.5）**今回は課題(P18-20)をここに入れてください。**

10)　**参考文献**・・この報告書をまとめるために使用した本や書物などを記録します。本の場合は，著者名，出版社，書名，出版年などを記録します。

平成　　年度

工学ワークショップⅡ　実習報告書

実習課題：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

実習日：平成　　年　　月　　日

指導教員：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿先生

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿先生

提出日：平成　　年　　月　　日

所　属：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

氏　名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

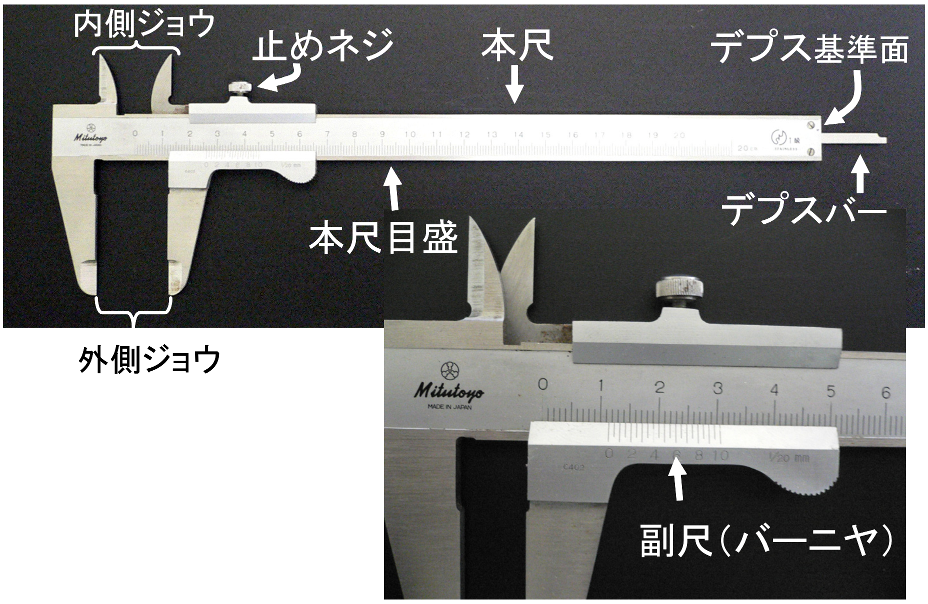
共同実験者名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

共同実験者名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

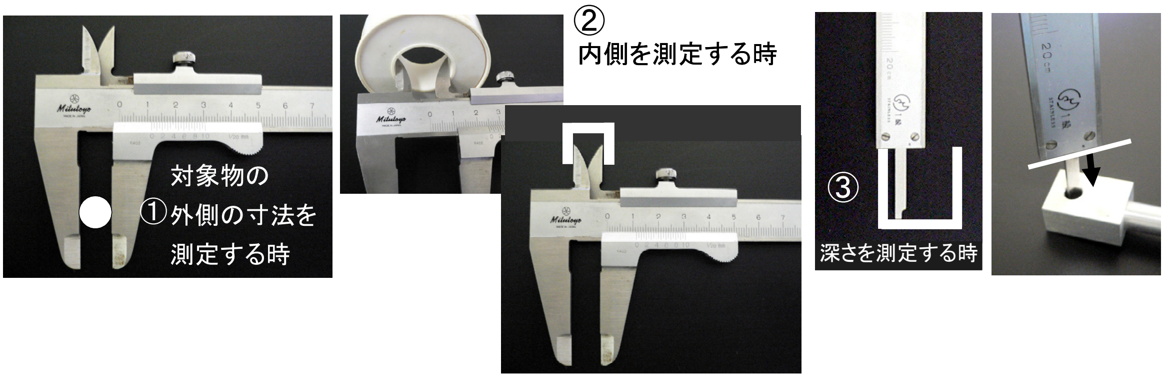
共同実験者名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

～ 付　録 ～

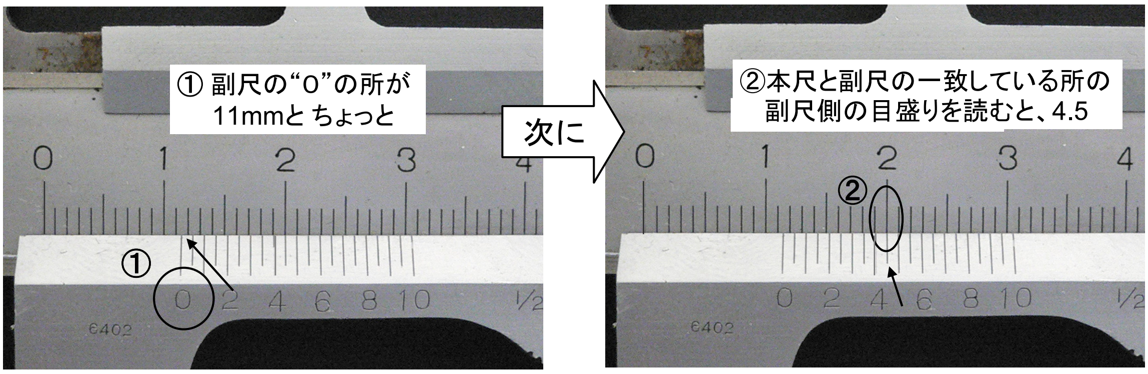
１　ノギス（バーニヤ）について



２　活用方法



３　測定方法

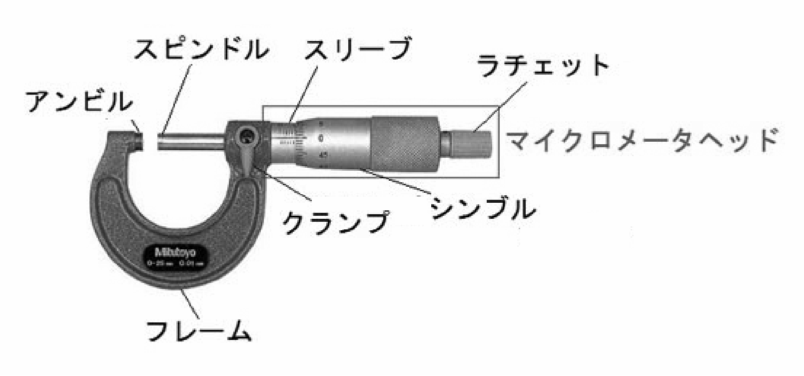


よって、“ 11.45 mm ”と読むことができます。
（つまり、副尺の“０”の目盛りは、本尺の 11.45㎜ を指しているのです。）

別の測定で、もし、②で本尺と一致している副尺側の目盛り（下側）が７であった場合は、11.70 mm というように読みます。（0 を忘れないように）

～ 付　録 ～

１　マイクロメータの名称



２　測定方法

　計り方のコツは、対象物を2，３度サッサッと計り直しながら、はさみぐあいをチェックし読むのがポイントです。（あまりに精度が良いので測定対象物のはさみ方で値が簡単に変わるため）

（1）　マイクロメータのフレームを持ち、シンブルを回し、測定対象が入るくらいアンビルとスピンドルの間隔を広げる。（授業ではマイクロメータ用のスタンドで固定して測定を行う）
　　※測定時に専用のスタンドでフレームを固定すると両手が使えるため計測しやすい。

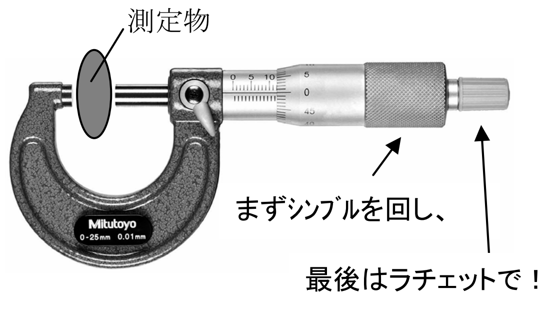
（2）　アンビルとスピンドルの間に測定対象物を入れ、シンブルを回しながら、アンビルとスピンドルに挟まる直前まで回す。

（3）　接触する寸前に、今度はラチェットを回して締めつけ、カチカチカチと2～3回空回りさせる。

（4）　シンブルの止まったところの目盛りを仮に読む。（まず、軽く１回目を読む）

（5）　シンブルを少し逆に回して、測定対象物とアンビルとスピンドルを離し、再度はさみ込む。

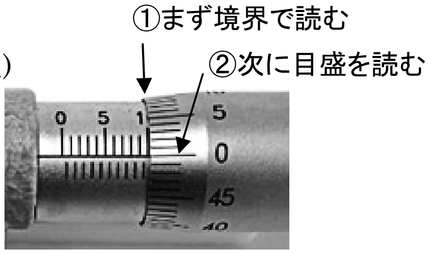
（6）　（3）（4）（5）を2，３度繰り返し、読みがほぼ同じなら、測定対象を正しくはさんで測定できていると判断し、最終的に採用する計測値を読み取る。



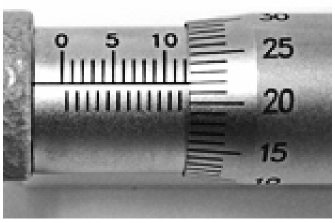
マイクロメータのシンブルとスピンドルは一体で回転するようになっており、　１回転で０．５ミリ正確に動きます。
また、シンブル外周には、50等分した目盛りがあり、最小単位１目盛り0．01ミリになっています。
さらに最小目盛り間を推読すると、０．００1ミリ（1/1000 ミリ＝マイクロ）まで読むことができます。

●読みの演習問題

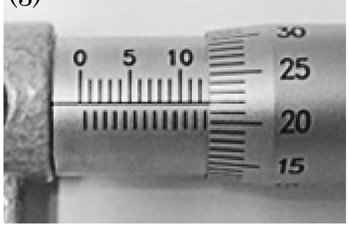
(1)



(2)



(3)



(1) 10.000 mm　(2) 12.220 mm　(3) 12.720 mm

工学基礎実験Ⅱ　計測と誤差 テキスト
医用工学部　臨床工学科
2019 年 3 月 1 日　改訂 4 版
著者・監修　森下 武志

TOIN GAKUEN